Exámenes de Selectividad

Matemáticas. Andalucía 2021, Ordinaria

mentoor.es

Ejercicio 1. Análisis

Se sabe que la gráfica de la función f definida por $\mathbf{f(x) = \frac{ax^2+bx+2}{x-1}}$ (para $\mathbf{x \neq 1}$) tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $\mathbf{(1,1)}$ y tiene pendiente 2. Calcula a y b.

Solución:

Una función racional tiene una asíntota oblicua cuando el grado del polinomio del numerador es exactamente uno mayor que el grado del polinomio del denominador, como ocurre en este caso. La ecuación de esta asíntota se puede determinar encontrando la recta a la que la función se aproxima cuando $|x|$ tiende a infinito. Primero, vamos a determinar la ecuación de la asíntota oblicua. Se nos dice que tiene una pendiente de 2 y pasa por el punto $(1,1)$. Utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, $y - y_0 = m(x - x_0)$, donde m es la pendiente y (x_0, y_0) es el punto por el que pasa la recta, tenemos:

$$y - 1 = 2(x-1).$$

Desarrollando esta ecuación, obtenemos:

$$y - 1 = 2x - 2.$$

Sumando 1 a ambos lados, encontramos la ecuación de la asíntota oblicua:

$$y = 2x - 1.$$

La pendiente de la asíntota oblicua, m, se calcula mediante el límite:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Sustituyendo la función $f(x)$:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{ax^2+bx+2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+2}{x(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+2}{x^2-x}.$$

Para evaluar este límite, dividimos el numerador y el denominador por la mayor potencia de x, que es x^2:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{ax^2}{x^2} + \frac{bx}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{a + \frac{b}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}.$$

Cuando $x \to \infty$, los términos $\frac{b}{x}$, $\frac{2}{x^2}$ y $\frac{1}{x}$ tienden a 0. Entonces,

$$m = \frac{a+0+0}{1-0} = a.$$

El problema nos indica que la pendiente de la asíntota oblicua es 2:

$$a = 2.$$

El término independiente de la asíntota oblicua, n, se calcula mediante el límite:

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$$

Sustituyendo $f(x)$ y el valor de $m = a = 2$:

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+bx+2}{x-1} - 2x \right).$$

Para combinar los términos, buscamos un denominador común:

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+bx+2-2x(x-1)}{x-1} \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+bx+2-2x^2+2x}{x-1} \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{(b+2)x+2}{x-1} \right).$$

Para evaluar este límite, dividimos el numerador y el denominador por la mayor potencia de x, que es x:

$$n = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{(b+2)x}{x} + \frac{2}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{b+2+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}.$$

Cuando $x \to \infty$, los términos $\frac{2}{x}$ y $\frac{1}{x}$ tienden a 0, así:

$$n = \frac{b+2+0}{1-0} = b+2.$$

Sabemos que $n = -1$:

$$b+2 = -1.$$

Despejando b:

$$b = -3.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{a = 2, \quad b = -3}$$

Ejercicio 2. Análisis

Considera la función continua $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} (3x-6)e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{36(\sin(x)-ax)}{x^3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) **Calcula a.**
b) **Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $\mathbf{x=-1}$.**

Solución:

a) **Calcula a.**

Para que la función $f(x)$ sea continua en $x=0$, deben coincidir el límite por la izquierda, el límite por la derecha y el valor de la función en $x=0$. Calculamos el valor de la función en $x=0$:

$$f(0) = (3(0)-6)e^0 = (-6)(1) = -6.$$

Calculamos el límite de la función cuando x tiende a 0 por la izquierda ($x \leq 0$):

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(3x-6)e^x = (3(0)-6)e^0 = -6\cdot 1 = -6.$$

Calculamos el límite de la función cuando x tiende a 0 por la derecha ($x > 0$):

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{36(\sin(x)-ax)}{x^3} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminzación.}$$

Como tenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, podemos aplicar la regla de L'Hôpital. Aplicando la regla de L'Hôpital una vez:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{36(\cos(x)-a)}{3x^2} = 12\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)-a}{x^2}.$$

Para que este límite exista y sea finito, el numerador también debe tender a 0 cuando $x\to 0$:

$$\cos(0)-a = 1-a = 0 \quad\Rightarrow\quad a=1.$$

Sustituimos $a=1$ y aplicamos la regla de L'Hôpital nuevamente:

$$12\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin(x)}{2x} = -6\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x}.$$

Sabemos que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ (infinitésimo equivalente):

$$-6\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x} = -6\cdot 1 = -6.$$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -6$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -6$ y $f(0) = -6$, la función es continua en $x=0$ para $a=1$.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{a=1}$$

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = −1.

Para encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = -1$, necesitamos el valor de la función en ese punto y el valor de su derivada en ese punto. Como $-1 \leq 0$, utilizamos la primera parte de la función: $f(x) = (3x - 6)e^x$.

Calculamos el valor de la función en $x = -1$:

$$f(-1) = (3(-1) - 6)e^{-1} = (-3 - 6)e^{-1} = -9e^{-1} = -\frac{9}{e}.$$

El punto de tangencia es $(-1, -\frac{9}{e})$.

Calculamos la derivada de $f(x)$ para $x \leq 0$. Usamos la regla del producto: $(uv)' = u'v + uv'$, donde $u = 3x - 6$ y $v = e^x$:

$$f'(x) = (3)(e^x) + (3x - 6)(e^x) = 3e^x + 3xe^x - 6e^x = (3x - 3)e^x.$$

Calculamos el valor de la derivada en $x = -1$:

$$f'(-1) = (3(-1) - 3)e^{-1} = (-3 - 3)e^{-1} = -6e^{-1} = -\frac{6}{e}.$$

La pendiente de la recta tangente en $x = -1$ es $m = -\frac{6}{e}$.

La ecuación de la recta tangente es de la forma $y - y_0 = m(x - x_0)$, donde $(x_0, y_0) = (-1, -\frac{9}{e})$ y $m = -\frac{6}{e}$:

$$y - \left(-\frac{9}{e}\right) = -\frac{6}{e}(x - (-1)) \quad \Rightarrow \quad y + \frac{9}{e} = -\frac{6}{e}x - \frac{6}{e} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{6}{e}x - \frac{15}{e}.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{y = -\frac{6}{e}x - \frac{15}{e}}$$

Ejercicio 3. Análisis

Considera la función $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{f(x) = 4x^3 - x^4}$.

a) **Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.**
b) **Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas.**

Solución:

a) **Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.**

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 4x^3 - x^4$, necesitamos analizar el signo de su primera derivada, $f'(x)$. Calculamos la primera derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(4x^3 - x^4) = 12x^2 - 4x^3.$$

Para encontrar los puntos críticos, igualamos la primera derivada a cero:

$$f'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2(3 - x) = 0.$$

Esto nos da dos puntos críticos: $x = 0$ y $x = 3$.

Estos puntos críticos dividen la recta real en tres intervalos: $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$ y $(3, \infty)$. Analizamos el signo de $f'(x)$ en cada intervalo:

– Intervalo $(-\infty, 0)$: Tomamos un punto de prueba, por ejemplo, $x = -1$.

$$f'(-1) = 4(-1)^2(3 - (-1)) = 4(1)(3 + 1) = 4(4) = 16 > 0$$

Como $f'(-1) > 0$, la función $f(x)$ es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.

– Intervalo $(0, 3)$: Tomamos un punto de prueba, por ejemplo, $x = 1$.

$$f'(1) = 4(1)^2(3 - 1) = 4(1)(2) = 8 > 0$$

Como $f'(1) > 0$, la función $f(x)$ es creciente en el intervalo $(0, 3)$.

– Intervalo $(3, \infty)$: Tomamos un punto de prueba, por ejemplo, $x = 4$.

$$f'(4) = 4(4)^2(3 - 4) = 4(16)(-1) = -64 < 0$$

Como $f'(4) < 0$, la función $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(3, \infty)$.

Intervalo en x	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
Punto de prueba	$x = -1$	$x = 1$	$x = 4$
$f'(x) = 4x^2(3 - x)$	$4(-1)^2(3 - (-1)) = 16 > 0$	$4(1)^2(3 - 1) = 8 > 0$	$4(4)^2(3 - 4) = -64 < 0$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{La función } f(x) \text{ es creciente en } (-\infty, 0) \cup (0, 3) \\ \text{La función } f(x) \text{ es decreciente en } (3, \infty) \end{array}}$$

b) **Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas.**

Para esbozar la gráfica de $f(x) = 4x^3 - x^4$, primero encontramos los puntos de corte con el eje de abscisas (raíces de la función).

$$f(x) = 4x^3 - x^4 = x^3(4 - x) = 0.$$

Las raíces son $x = 0$ (con multiplicidad 3) y $x = 4$ (con multiplicidad 1). Esto significa que la gráfica toca el eje x en $x = 0$ y lo cruza, y cruza el eje x en $x = 4$.

También encontramos el punto donde la función alcanza un máximo local, que ocurre en $x = 3$ (donde la función pasa de creciente a decreciente). El valor de la función en este punto es:

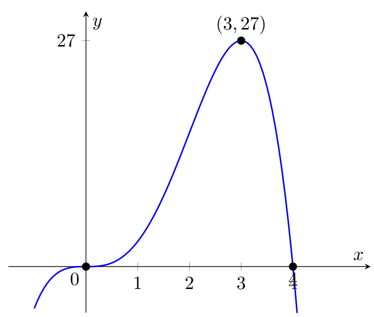
$$f(3) = 4(3)^3 - (3)^4 = 4(27) - 81 = 108 - 81 = 27.$$

El máximo local se encuentra en el punto $(3, 27)$.

Para tener una mejor idea de la forma de la gráfica, podemos analizar el comportamiento en el infinito:

$$\lim_{x\to\infty}(4x^3 - x^4) = \lim_{x\to\infty} -x^4(1 - \frac{4}{x}) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(4x^3 - x^4) = \lim_{x\to-\infty} -x^4(1 - \frac{4}{x}) = -\infty.$$



Para calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas, necesitamos integrar la función entre sus raíces, $x = 0$ y $x = 4$. En este intervalo, $f(x) \geq 0$, por lo que el área viene dada por la integral definida:

$$\text{Área} = \int_0^4 |f(x)|dx = \int_0^4 (4x^3 - x^4)dx.$$

Calculamos la integral:

$$\int (4x^3 - x^4)dx = 4\int x^3dx - \int x^4dx = 4\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + C = x^4 - \frac{x^5}{5} + C.$$

Ahora evaluamos la integral definida mediante la Regla de Barrow:

$$\text{Área} = \left[x^4 - \frac{x^5}{5}\right]_0^4 = \left((4)^4 - \frac{(4)^5}{5}\right) - \left((0)^4 - \frac{(0)^5}{5}\right) = \frac{256}{5}\ u^2.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{El área del recinto es } \frac{256}{5} \text{ unidades cuadradas}}$$

Ejercicio 4. Análisis

Considera la función $\mathbf{F}:[\mathbf{0},+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$\mathbf{F(x)}=\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}}(\mathbf{2t}+\sqrt{\mathbf{t}})\,\mathbf{dt}.$$

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $\mathbf{x=1}$.

Solución:

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función $F(x)$ en el punto de abscisa $x=x_0$ está dada por la fórmula:

$$y-F(x_0)=F'(x_0)(x-x_0).$$

En nuestro caso, queremos encontrar la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$, por lo que $x_0=1$. Necesitamos calcular $F(1)$ y $F'(1)$.

Cálculo de $F(1)$: Debemos obtener

$$F(1)=\int_0^1(2t+\sqrt{t})\,dt.$$

Primero, encontramos la antiderivada de la función integrando $2t+\sqrt{t}=2t+t^{1/2}$:

$$\int(2t+t^{1/2})\,dt=2\int t\,dt+\int t^{1/2}\,dt=2\frac{t^{1+1}}{1+1}+\frac{t^{1/2+1}}{1/2+1}+C=2\frac{t^2}{2}+\frac{t^{3/2}}{3/2}+C=t^2+\frac{2}{3}t^{3/2}+C.$$

Ahora, evaluamos la integral definida:

$$F(1)=\left[t^2+\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1=\left((1)^2+\frac{2}{3}(1)^{3/2}\right)-\left((0)^2+\frac{2}{3}(0)^{3/2}\right)=\frac{5}{3}.$$

Entonces, $F(1)=\frac{5}{3}$.

Cálculo de $F'(1)$: Para encontrar la derivada de $F(x)$, utilizamos el Teorema Fundamental del Cálculo, que establece que si $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, entonces $F'(x)=f(x)$. En nuestro caso, $f(t)=2t+\sqrt{t}$:

$$F'(x)=2x+\sqrt{x}.$$

Ahora, evaluamos la derivada en $x=1$:

$$F'(1)=2(1)+\sqrt{1}=2+1=3.$$

Así, $F'(1)=3$.

Sustituimos los valores de $x_0=1$, $F(1)=\frac{5}{3}$ y $F'(1)=3$ en la ecuación de la recta tangente:

$$y-\frac{5}{3}=3(x-1)\quad\Rightarrow\quad y=3x-\frac{4}{3}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{y=3x-\frac{4}{3}}$$

Ejercicio 5. Álgebra

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx + 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x + 3my = m + \frac{2}{5} \end{cases}$$

a) **Discute el sistema según los valores de m.**
b) **Resuelve el sistema para m = 0. ¿Hay alguna solución en la que x = 0? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.**

Solución:

a) **Discute el sistema según los valores de m.**

Escribimos la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada A^* del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & 3m & 0 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 3m & 0 & m + \frac{2}{5} \end{array}\right).$$

Para discutir el sistema, calculamos el determinante de la matriz de coeficientes A:

$$\det(A) = m \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3m & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 3m \end{vmatrix} = m(0 - 6m) - 2(0 - 2) - (15m - (-4))$$
$$= -6m^2 + 4 - 15m - 4 = -6m^2 - 15m = -3m(2m + 5).$$

Igualamos el determinante a cero para encontrar los valores críticos de m:

$$-3m(2m + 5) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0 \quad \text{o} \quad 2m + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{5}{2}.$$

Caso 1: $m \neq 0$ y $m \neq -\frac{5}{2}$. En este caso, $\det(A) \neq 0$, por lo que $\text{rango}(A) = 3$. Como la matriz ampliada A^* también tiene 3 filas, su rango es también 3. Por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado (tiene una única solución).

Caso 2: $m = 0$. Sustituimos $m = 0$ en las matrices A y A^*:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{array}\right).$$

Calculamos el rango de A. Como $\det(A) = 0$, el rango es menor que 3. Consideramos el menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$. Por lo tanto, $\text{rango}(A) = 2$. Ahora calculamos el rango de A^*. Realizamos operaciones elementales en la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{F_2 - 5F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + \frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

La matriz escalonada tiene dos filas no nulas, por lo que $\text{rango}(A^*) = 2$. Como $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*) < 3$, el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).

<u>Caso 3:</u> $m = -\frac{5}{2}$. Sustituimos $m = -\frac{5}{2}$ en las matrices A y A^*:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & -\frac{15}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{5}{2} & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & -\frac{15}{2} & 0 & -\frac{21}{10} \end{array}\right).$$

Sabemos que $\det(A) = 0$, por lo que $\text{rango}(A) < 3$. Consideramos el menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} -\frac{5}{2} & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 10 - 10 = 0.$$

Consideramos otro menor:

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -\frac{15}{2} \end{vmatrix} = -\frac{75}{2} + 4 = -\frac{67}{2} \neq 0.$$

Entonces, $\text{rango}(A) = 2$. Ahora calculamos el rango de A^*. Observemos que la segunda fila de la matriz de coeficientes es -2 veces la primera fila. Sin embargo, el segundo término independiente (0) no es -2 veces el primer término independiente (1). Esto indica que el sistema es incompatible. Por lo tanto, $\text{rango}(A^*) = 3$. Dado que $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, el sistema es incompatible (no tiene solución).

Por lo tanto, la discusión del sistema es:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} m \neq 0, -\dfrac{5}{2} & \Rightarrow & \text{Sistema Compatible Determinado} \\ m = 0 & \Rightarrow & \text{Sistema Compatible Indeterminado} \\ m = -\dfrac{5}{2} & \Rightarrow & \text{Sistema Incompatible} \end{array}}$$

b) Resuelve el sistema para m = 0. ¿Hay alguna solución en la que x = 0? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Para $m = 0$, el sistema es:

$$\begin{cases} 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases}$$

De la tercera ecuación, tenemos $x = \frac{2}{5}$. Sustituimos este valor en la segunda ecuación:

$$5\left(\frac{2}{5}\right) - 4y + 2z = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - 4y + 2z = 0 \quad \Rightarrow \quad -4y + 2z = -2 \quad \Rightarrow \quad -2y + z = -1.$$

Ahora tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y y z:

$$\begin{cases} 2y - z = 1 \\ -2y + z = -1 \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones, obtenemos $0 = 0$, lo que indica que las dos ecuaciones son dependientes. Podemos resolver la primera ecuación para z: $z = 2y - 1$. Por lo tanto, la solución del sistema para $m = 0$ es

$$\left(\frac{2}{5}, y, 2y - 1\right),$$

donde y es cualquier número real.

¿Hay alguna solución en la que $x = 0$? Para que $x = 0$, la tercera ecuación del sistema con $m = 0$ requiere $0 = \frac{2}{5}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no hay ninguna solución del sistema para $m = 0$ en la que $x = 0$.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{Para } m = 0, \text{ la solución es } \left(\frac{2}{5}, y, 2y - 1\right), y \in \mathbb{R}, \text{ y no hay solución con } x = 0}$$

Ejercicio 6. Álgebra

En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón.
El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora.
¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

Solución:

Para resolver este problema, vamos a plantear un sistema de ecuaciones lineales. Definimos las siguientes variables:

- b: número de botellas producidas cada hora.
- g: número de garrafas producidas cada hora.
- d: número de bidones producidos cada hora.

A partir de la información proporcionada en el enunciado, podemos establecer las siguientes ecuaciones:

1. Cantidad de polietileno utilizado: La empresa utiliza 10 kg de polietileno cada hora, lo que equivale a 10000 gramos. Cada botella necesita 50 gramos, cada garrafa 100 gramos y cada bidón 1 kg = 1000 gramos. La ecuación es:
$$50b + 100g + 1000d = 10000.$$
Dividiendo toda la ecuación por 50 para simplificarla, obtenemos:
$$b + 2g + 20d = 200.$$
2. Relación entre botellas y garrafas: Se debe producir el doble de botellas que de garrafas:
$$b = 2g.$$
3. Número total de productos: En las máquinas se producen en total 52 productos cada hora:
$$b + g + d = 52.$$

Tenemos un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} b + 2g + 20d = 200 \\ b = 2g \\ b + g + d = 52 \end{cases}$$

Vamos a resolver este sistema utilizando el método de sustitución.

Sustituimos la $b = 2g$ en la ecuación 3:

$$(2g) + g + d = 52 \quad \Rightarrow \quad 3g + d = 52.$$

Despejamos d de esta ecuación:

$$d = 52 - 3g.$$

Ahora sustituimos $b = 2g$ en la ecuación 1:

$$(2g) + 2g + 20d = 200 \quad \Rightarrow \quad 4g + 20d = 200.$$

Dividimos toda la ecuación por 4 para simplificarla:

$$g + 5d = 50.$$

Finalmente, sustituimos la $d = 52 - 3g$ en esta última ecuación:

$$g + 5(52 - 3g) = 50 \quad \Rightarrow \quad g + 260 - 15g = 50 \quad \Rightarrow \quad -14g = -210 \quad \Rightarrow \quad g = \frac{-210}{-14} = 15.$$

Por lo tanto, se producen 15 garrafas cada hora. Ahora podemos encontrar el número de botellas:

$$b = 2g = 2(15) = 30.$$

Se producen 30 botellas cada hora. Y podemos encontrar el número de bidones:

$$d = 52 - 3g = 52 - 3(15) = 52 - 45 = 7.$$

Se producen 7 bidones cada hora.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{Se producen 30 botellas, 15 garrafas y 7 bidones cada hora}}$$

Ejercicio 7. Geometría

Considera las rectas

$$\mathbf{r} \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \quad \mathbf{s} \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

a) **Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $\mathbf{P(1, 0, -5)}$.**
b) **Calcula el seno del ángulo que forma la recta r con el plano $\pi \equiv \mathbf{-2x + y + 2z = 0}$.**

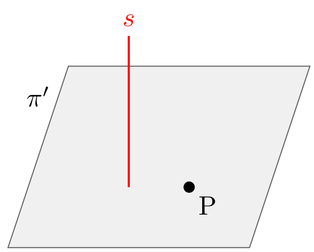
Solución:

a) **Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $\mathbf{P(1, 0, -5)}$.**

La recta s está dada en forma paramétrica:

$$s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

El vector director de la recta s se obtiene de los coeficientes de λ, que es $\vec{v}_s = (-2, 1, 2)$.



Un plano perpendicular a la recta s tendrá como vector normal el vector director de la recta s. Por lo tanto, el vector normal del plano que buscamos es $\vec{n} = (-2, 1, 2)$.

La ecuación de un plano con vector normal $\vec{n} = (A, B, C)$ que pasa por un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. En nuestro caso, $P(1, 0, -5)$ y $\vec{n} = (-2, 1, 2)$.

Sustituyendo los valores, obtenemos la ecuación del plano:

$$-2(x - 1) + 1(y - 0) + 2(z - (-5)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi' \equiv -2x + y + 2z + 12 = 0.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\pi' \equiv -2x + y + 2z + 12 = 0}$$

b) **Calcula el seno del ángulo que forma la recta r con el plano $\pi \equiv \mathbf{-2x + y + 2z = 0}$.**

La recta r está dada por la intersección de dos planos:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

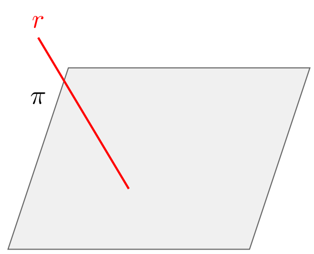
El vector director de la recta r es el producto vectorial de los vectores normales de los dos planos. Los vectores normales son $\vec{n}_1 = (2, -3, 1)$ y $\vec{n}_2 = (-3, 2, 2)$.

$$\vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-6-2)\vec{i} - (4-(-3))\vec{j} + (4-9)\vec{k} = -8\vec{i} - 7\vec{j} - 5\vec{k} = (-8, -7, -5).$$

El plano π tiene ecuación $-2x + y + 2z = 0$. Su vector normal es $\vec{n}_\pi = (-2, 1, 2)$.

El ángulo α que forma una recta con un plano es el ángulo complementario del ángulo β que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano. Es decir, $\alpha = 90° - \beta$, por lo que $\sin(\alpha) = \cos(\beta)$. El seno del ángulo que forma la recta r con el plano π se puede calcular utilizando la fórmula:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{v}_r||\vec{n}_\pi|}.$$



Calculamos el producto escalar $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi$:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (-8)(-2) + (-7)(1) + (-5)(2) = 16 - 7 - 10 = -1.$$

Calculamos los módulos de los vectores:

$$|\vec{v}_r| = \sqrt{(-8)^2 + (-7)^2 + (-5)^2} = \sqrt{64 + 49 + 25} = \sqrt{138},$$

$$|\vec{n}_\pi| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

Sustituimos estos valores en la fórmula del seno del ángulo:

$$\sin(\alpha) = \frac{|-1|}{\sqrt{138} \cdot 3} = \frac{1}{3\sqrt{138}}.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{1}{3\sqrt{138}}}$$

Ejercicio 8. Geometría

La recta $\mathbf{r} \equiv \frac{\mathbf{x+3}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{y+4}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{z-3}}{\mathbf{3}}$ y la recta s, que pasa por los puntos $\mathbf{P(1,0,2)}$ y $\mathbf{Q(a,1,0)}$, se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.

Solución:

Primero, vamos a escribir las ecuaciones paramétricas de ambas rectas. La recta r está dada en forma continua: $\frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$. Igualando cada fracción a un parámetro λ, obtenemos las ecuaciones paramétricas de r:

$$\frac{x+3}{2} = \lambda \quad \Rightarrow \quad x = 2\lambda - 3,$$
$$\frac{y+4}{2} = \lambda \quad \Rightarrow \quad y = 2\lambda - 4,$$
$$\frac{z-3}{3} = \lambda \quad \Rightarrow \quad z = 3\lambda + 3.$$

Así, las ecuaciones paramétricas de la recta r son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda - 3 \\ y = 2\lambda - 4 \\ z = 3\lambda + 3 \end{cases}$$

La recta s pasa por los puntos $P(1,0,2)$ y $Q(a,1,0)$. El vector director de la recta s es $\vec{v}_s = \vec{PQ} = Q - P = (a-1, 1-0, 0-2) = (a-1, 1, -2)$. Utilizando el punto $P(1,0,2)$ y el vector director $\vec{v}_s$, las ecuaciones paramétricas de la recta s son:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + (a-1)\mu \\ y = 0 + 1\mu = \mu \\ z = 2 + (-2)\mu = 2 - 2\mu \end{cases}$$

donde μ es otro parámetro. Si las rectas r y s se cortan en un punto, entonces existe un punto cuyas coordenadas satisfacen las ecuaciones paramétricas de ambas rectas para algunos valores de λ y μ. Igualando las coordenadas correspondientes, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2\lambda - 3 = 1 + (a-1)\mu \\ 2\lambda - 4 = \mu \\ 3\lambda + 3 = 2 - 2\mu \end{cases}$$

Sustituimos la ecuación 2 ($\mu = 2\lambda - 4$) en la ecuación 3:

$$3\lambda + 3 = 2 - 2(2\lambda - 4) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1.$$

Ahora sustituimos el valor de $\lambda = 1$ en la ecuación 2 para encontrar el valor de μ:

$$\mu = 2(1) - 4 = 2 - 4 = -2.$$

Finalmente, sustituimos los valores de $\lambda = 1$ y $\mu = -2$ en la ecuación 1 para encontrar el valor de a:

$$2(1) - 3 = 1 + (a-1)(-2) \quad \Rightarrow \quad a = 2.$$

Por lo tanto, el valor de a para que las rectas se corten es $a = 2$. Para encontrar el punto de corte, sustituimos el valor de $\lambda = 1$ en las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$x = 2(1) - 3 = -1,$$

$$y = 2(1) - 4 = -2,$$

$$z = 3(1) + 3 = 6.$$

El punto de corte es $(-1, -2, 6)$.

Podemos verificar este punto sustituyendo $a = 2$ y $\mu = -2$ en las ecuaciones paramétricas de la recta s:

$$x = 1 + (2-1)(-2) = 1 + (1)(-2) = 1 - 2 = -1,$$

$$y = -2,$$

$$z = 2 - 2(-2) = 2 + 4 = 6.$$

El punto coincide, por lo que el punto de corte es correcto.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{a = 2 \quad \text{y el punto de corte es } (-1, -2, 6)}$$